Konrad Duden Gymnasium Wesel **Stufe 12.2**

Facharbeit

im Leistungskurs Mathematik

Lösung der Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nach Niccolo Tartagila und Girolamo Cardano

Verfasser : NN

Kursleiter : NN

Abgabeternim :

1. Geschichtlicher Hintergrund

Girolamo Cardano (1501-1576) ist der Namensgeber der Lösungsformel für die kubische Gleichung. Er beschrieb den Lösungsweg in seinem „Ars Magna sive de regulis algebraicis“, den Regeln der Algebra. Der Mailänder, der in Padua Philosophie und Medizin studiert hatte war sich im Klaren über seine Leistung und beendete seine „Ars Magna“ mit den Worten, „sie sei zwar in fünf Jahren geschrieben worden, doch sie werde für viele Jahrhunderte gültig sein“[1].

Cardano war jedoch nicht der Erste, dem es gelungen war diese Herausforderung zu meistern. Bereits 1515 soll Scripione del Ferro (1456-1526), ein Mathematiker und Professor an der Universität von Bologna, diese Aufgabe gelöst haben. Del Ferro hatte zu Lebzeiten keine Veröffentlichungen gemacht und sein ganzes Wissen nur an seine Schüler weitergegeben, darüber hinaus war er schon verstorben als die „Ars Magna“ erschien. Daher gab es von del Ferros Seite kein Konfliktpotential. Der Streit um die Urheberrechte der Formel entbrannte zwischen Cardano und Niccolo Tartaglia(1449od.1500-1557), dessen richtiger Name Nicolo Fontana war. Tartaglia war Rechenmeister zu Venedig und hatte einen Sprachfehler, der ihn öffentliche Auseinandersetzungen meiden lies. Noch vor dem Erscheinen der „Ars Magna“ hatte er eine Herausforderung von Antoniomaria Fior angenommen. Fior war einer der Schüler Del Ferros gewesen und verfügte über die Lösung der kubischen Formel, jedoch nicht über ihren Beweiß, den Del Ferro schuldig geblieben war. Fior stellte Tartaglia 30 Aufgaben vom Typ $x^3 + px = q$, die Tartaglia erfolgreich löste. Nun hörte Cardano, dass Tartaglia im Besitz des Lösungsweges war und bot ihm eine Erwähnung in seiner „Ars Magna“ für den Lösungsweg. Tartaglia lehnte zunächst ab, aber nach einigen Überredungsversuchen Cardanos übergab ihm Tartaglia seine Lösung und ließ diesen im Gegenzug den heiligen Eid schwören, diese nicht zu verraten. Cardano brach diesen Eid und es entbrannte ein Gelehrtenstreit, wie ihn die Welt bis dahin nicht kannte Tartaglia veröffentlichte Flugblätter, mithilfe derer er den Betrug Cardanos aufdecken wollte. Cardano selbst hielt sich heraus und überlies Ludovico Ferrari die Verteidigung seiner Ehre. Ferrari unterrichtete zusammen mit Cardano an der Universität in Mailand und war ein „händelsüchtiger Heißsporn“[2], der vier Finger bei einer Stecherei verloren

[1] Aus: D.Jörgensen „Der Rechenmeister“ S. 363

[2] Aus: D.Jörgensen „Der Rechenmeister“ S. 372

hatte. Er fühlte sich Cardano mehr verbunden als seinem eigenen Vater. Ferrari offenbarte, dass Cardano die Herausforderung durch Fior in die Wege geleitet hatte, um an den Beweiß zu kommen, der in Del Ferros Aufzeichnungen fehlte. Diese Aufzeichnungen hatte Cardano von dem Ehrenmann Annibale della Nave, der Del Ferros Schwiegersohn war. Trotz dieser und der Tatsache, dass er in der „Ars Magna“ als Widerentdecker genannt wurde, fühlte sich Tartaglia um sein Lebenswerk betrogen und war bereit sich Cardano in aller Öffentlichkeit zu stellen.
Als es dann am 10. August 1548 soweit war, musste Tartaglia feststellen, dass Cardano nicht erschienen war und dass es sich einer feindseligen Menge und einem aggressiven Ferrari stellen musste. Die Menge schüchterte Tartaglia ein und erstickte seine durch sein Stottern erschwerten Redeversuche. Angesichts der Lage und Ferraris Aggressivität blieb Tartaglia nur der Rückzug. Die Menge fungierte als Schiedsrichter und erklärte Ferrari zum Sieger des Wettstreits, Cardano wurde zum Namensgeber der „Cardanischen Gleichung“ und Tartaglia musste sich in Anbetracht der Umstände glücklich schätzen, mit dem Leben davon gekommen zu sein.

1.2. Tartaglias Formel

Niccolo Tartaglia übergab seine Lösung der kubischen Gleichung an Girolamo Cardano, unter der Bedingung, dass er diese verschlüsselt aufbewahrt und nicht veröffentlicht. Tartaglia händigte Cardano die Formel in bereits verschlüsselter Form als Gedicht aus.
Cardano brach sein Versprechen und veröffentlichte die Lösung, dazu musste er sie zunächst enträtseln, was zu einer eigenen Herausforderung wurde.

1.2.1. Original

“Quando chel cubo con le cose appresso / Se agguaglia a qualche numero discreto / Trouan dui altri differenti in esso. / Da poi terrai questo per consueto / Che’ llor prodotto sempre sia eguale / Al terzo cubo delle cose neto, / El residuo poi suo generale / Delli lor lati cubi ben sottratti / Varra la tua cosa principale. / In el secondo de cotesti atti / Quando che’l cubo restasse lui solo / Tu osseruarai quest’altri contratti, / Del numer farai due tal part’a uolo / Che l’una in l’altra si produca schietto / El terzo cubo delle cose in stolo / Delle qual poi, per commun precetto / Torrai li lati cubi insieme gionti / Et cotal somma sara il tuo concetto. / El terzo poi de questi nostri conti / Se solue col secondo se ben guardi / Che per natura son quasi congionti. / Questi trouai, & non con paßi tardi / Nel mille cinquecento, quatroe trenta / Con fondamenti ben sald’e gagliardi / Nella Citta dal mar’intorno centa.”[3]

1.2.2. Übersetzung

„Wenn der Kubus mit den Coßen daneben / gleich ist einer diskreten Zahl, / finden sich als Differenz zwei andere in dieser./ Dann halte es wie gewöhnlich, / dass nämlich ihr Produkt gleich sei / dem Kubus des Drittels der Coßen, / Und der Rest dann, so die Regel, / ihrer Kubusseiten wohl subtrahiert / wird sein deine Hauptcoß. / In dem zweiten von diesen Fällen, / wenn der Kubus allein steht / und du betrachtest die anderen zusammengezogen, / Von der Zahl mache wieder zwei solche Teile, / dass der eine in den anderen multipliziert / den Kubus des Drittels der Coßen ergibt. / Von jenen dann, so die gemeine Vorschrift, / nimm die Kubusseiten zusammen vereint / und diese Summe wird dein Konzept sein. / Die dritte nun von diesen unseren Rechnungen / löst sich wie die zweite, wenn du wohl beachtest, / dass sie von Natur aus gleichsam verwandt sind. / Dieses fand ich, nicht schwerfälligen Schritts, / in Jahre tausendfünfhundertvierunddreißig / mit Begründungen triftig und fest / In der Stadt vom Meer rings umgürtet.“[4]

---

[3] Aus: „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/kubisch.html“ 12.12.01

[4] Aus: „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/kubisch.html“ 12.12.01

2. Benötigte Regeln

Zur Lösung der kubischen Formel wird einiges an Vorwissen benötigt. Darunter auch der Satz von Vieta. Dieses Material wird im Folgenden aufgeführt.

2.1. Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung *n*-ten Gerades, deren Koeffizienten reelle oder komplexe Zahlen sind, besitzt *n* reelle oder komplexe Wurzeln, wobei die *k*-fachen Wurzeln *k*-mal gezählt werden. Wenn die Wurzeln von *P(x)* mit α, β, γ … bezeichnet werden und diese jeweils die Vielfachheiten *k*, *l*, *m*,… besitzen, dann gilt die Darstellung in Faktoren (Produktdarstellung).

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l (x-\gamma)^m \ldots$$

Die Lösung einer Gleichung *P(x)* = 0 kann stets durch Zurückführen auf eine Gleichung vereinfacht werden, die die gleichen Wurzeln wie die Ausgangsgleichung hat, aber jeweils nur noch mit der Vielfachheit 1. Dazu wird das Polynom in zwei Faktoren derart zerlegt, so dass

$P(x) = Q(x)\, T(x),$

$T(x) = (x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots,\ Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots$

gilt. Man kann *T(x)* als größten gemeinsamen Teiler des Polynoms *P(x)* und dessen Ableitung *P'(x)* bestimmen, da die mehrfachen Wurzeln von *P(x)* auch Wurzeln von *P'(x)* sind. Das Polynom *Q(x)* erhält man dann durch Division von *P(x)* durch *T(x); Q(x)* hat dieselben Nullstellen wie *P(x),* aber mit der Vielfachheit 1.

2.2. p q-Formel

$$x_{1;2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2.3. Satz von Vieta

Der Satz von Vieta besagt, dass, wenn x_1 und x_2 die Lösungen der normierten, quadratischen Gleichung sind, die Summe der beiden Ergebnisse –q und das Produkt der beiden p ergibt.

Also gilt: $x_1 + x_2 = -q$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ bei $x^2 + px + q = 0$

2.4. Substitution

Bei einer Substitution ersetzt man bestimmte Teile einer Gleichung, um diese Lösbar zu machen oder sie in bestimmte Lösungsschemen einzupassen.

Beispiel: $x^6 - 12x^3 + 27 = 0$

Substitution: $y = x^3$

$y^2 - 12y + 27 = 0$; $y_{1;2} = 6 \pm \sqrt{36 - 27}$; $y_1 = 3$; $y_2 = 9$

$x_1 = \sqrt[3]{3}$; $x_2 = \sqrt[3]{9}$ $\Rightarrow L = \{\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9}\}$

3. Der Lösungsweg

Bei der zulösenden Gleichung handelt es sich um eine kubische Gleichung, bei der die größte Potenz, der Unbekannten x , x^3 ist. Also eine Gleichung dritten Grades. Die allgemeine kubische Gleichung lautet:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Um in der folgenden Rechnung erschwerenden Brüchen aus dem Weg zu gehen, erweitert man die Gleichung mit $27a^2$ und bringt dann die 2. und 3. Potenz auf eine Seite, man isoliert sie also.

Daraus folgt:

$$27a^3 x^3 + 27a^2bx^2 + 27a^2cx + 27a^2d = 0 \text{ und}$$

$$27a^3x^3 + 27a^2bx^2 = - 27a^2cx – 27a^2d$$

3.1. Kubische Ergänzung

Hier ähnelt das Verfahren noch dem, der Lösung der quadratischen Gleichung. Man macht hier eine kubische Ergänzung, und erreicht damit die Umformung der linken Seite der Gleichung, in die Form $(3ax + b)^3$, sozusagen eine Art binomische Formel.

Löst man diese auf, so erhält man:

$$(3ax + b)^3 = 27a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 9ab^2x + d^3$$

Daraus folgt, als kubische Ergänzung, der Term:

$$9ab^2x + b^3$$

Dieser wird auf beiden Seiten addiert und man erhält:

$$(3ax + b)^3 = 9ab^2x + b^3 – 27a^2cx – 27a^2d$$

$$= (3ax + b)^3 = 3(b^2 – 3ac) (3ax) + b^3 – 27a^2d$$

$$\Rightarrow (3ax + b)^3 + 3(3ac – b^2) (3ax) + 27a^2d – b^3 = 0$$

3.2. Substitution

In diesem Schritt ersetzt man, wie in 2.4., $3ax + b$ durch y. Als nächstes reduziert man diese Gleichung, indem man die Kürzel $p = 3ac – b^2$ und $q = 27a^2d – 9abc + 2b^3$ verwendet.

Also:

$y^3 + 3(3ac – b^2) (y – b) + 27a^2d – b^3 = y^3(3ac –b^2) y + 27a^2d – 9abc + 2b^3 = 0$

und

$y^3 + 3py + q = 0$

Löst man diese Gleichung nach *y* auf, so entspricht jedes *y* der Lösung $x = \frac{(y-b)}{(3a)}$, der ursprünglichen kubischen Gleichung.

3.3. Darstellung der Lösung mittels zweier Kubikwurzeln

Man geht nun davon aus, dass sich eine Lösung *y* der kubischen Gleichung aus der Summe zweier Kubikwurzeln zusammensetzt. Die Lösung der reduzierten kubischen Gleichung lässt sich also, als $y = u + v$ schreiben.

$\Rightarrow$ $(u + v)^3 = -3p(u + v) – q =$

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = -3p(u + v) – q$

Dazu müssen die Kubikwurzeln *p* und *q* folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$u^3 + v^3 = -q$; $u \cdot v = -p$

3.4. Lösung des Gleichungssystems

Nun ist es möglich das Gleichungssystem mit Hilfe des Satzes von Vieta (2.3.) zu lösen. Dazu muss man die Variablen so wählen, dass weder *u* noch *v* eine doppelte Verwendung finden. So ergibt sich die folgende Form für den Satz von Vieta:

Gleichung: $z^2 + sz + t = 0$

Nullstellen: z_1 ; z_2

System: $z_1 + z_2 = -s$; $z_1\, z_2 = t$

Wendet man nun diese Regel auf das oben angeführte Gleichungssystem an, so resultieren aus der Gleichsetzung von z_1 *und* u^3 und z_2 *und* v^3 die folgenden Gleichungen: $-s = z_1 +z_2 = u^3 + v^3 = -q$

$t = z_1\, z_2 = u^3\, v^3 = -p^3$

Ebenfalls aus derselben Gleichsetzung lässt sich, durch das zurückführen des Satzes von Vieta die, quadratische Resolvente bestimmen: $z^2 + qz – p^3 = 0$

Die Lösungen dieser Resolvente sind mit Hilfe der pq-Formel zu bestimmen, da die Resolvente in ihrer Form einer quadratischen Gleichung ähnelt. Berücksichtigt man, dass $u^3 = z_1$ und $v^3 = z_2$ ist, ergibt sich für die erste Lösung $y_1 = u + v$ der reduzierten kubischen Gleichung folgendes:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{-q^2 - 4p^3}\right) \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{-q^2 + 4p^3}\right)$$

$$u = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q + \sqrt{q^2 + 4p^3}} \quad ; \quad v = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-4q + \sqrt{q^2 + 4p^3}} + \sqrt[3]{-4q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}\right)$$

Um an die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung zu gelangen, muss man eine Rücksubstitution durchführen: $x_1 = \frac{(y_1 - b)}{(3a)}$

Nun kann der Fall eintreten, dass die Diskriminante $q^2 + p^3$ negativ ist, diesen Fall nennt man den Causus Ireducibilis (lat. Nicht zurückführbarer Fall). Um diesen zu behandeln, ist es nötig auf komplexe Zahlen zurückzugreifen, da dies Cardano nicht möglich war, wird dieser Fall außen vor gelassen.

Es ist eine Lösung der kubischen Gleichung ist nun bekannt, betrachtet man den Fundamentalsatz der Algebra, wird deutlich, dass es noch zwei Lösungen geben kann. Um an diese zu gelangen wird eine Polynomdivision nötig:

$$(y^3 + 3py + q) : (y - y_1) = y^2 + y_1 y + (y_1^2 + 3p) + \text{Rest}$$

Da uv = -p ist, gilt:

$$Y_{2;3} = y^2 + (u + v)y + ((u + v)^2 - 3uv) = 0$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist:

$$D = (u + v)^2 - 4((u + v)^2 - 3uv)$$

$$D = -3(u - v)^2$$

Da die Diskriminante für alle reellen u und v negativ ist, sind die Lösungen y_2 und y_3 , außer bei u = v, konjugiert komplex. So ergeben sich die folgenden Cardonischen Formeln:

$$y_1 = u + v$$

$$y_{2;3} = \frac{1}{2}\left(-(u + v) \pm (u - v)\sqrt{3}i\right)$$

Und die Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung: $x_i = \frac{(y_i - b)}{3a}$ für i = 1, 2, 3.

4. Lösung der kubischen Gleichung im Computerzeitalter

Um einen Weg zu beschreiten, der aktuell ist und komplexe Zahlen umgeht, werde ich im Folgenden die Lösung mit Hilfe des Newton- Verfahrens vorstellen.

4.1. Newton- Verfahren

Das Newton- Verfahren zur Lösung einer Funktion *F(x) = 0* ist ein Nährungsverfahren, zur Bestimmung der ersten Nullstelle. Dazu muss man *f(x)* und *f'(x)* kennen. Es wird nach der Vorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ verfahren. Dabei ist x_n ein beliebig gewählter x-Wert der Funktion und x_{n+1} die Nullstelle der Tangente von *f(x)* an den Punkt x_n. Die Nährung besteht darin, solange x_{n+1} für x_n einzusetzen, bis *f(x)* =0 wird.

4.2. Beispiel : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Zunächst erstellt man eine Wertetabelle, um anhand eines Vorzeichenwechsels, den Bereich für mögliche Nullstellen einzuschränken.

x	-10	-2	0	1
F(x)	-695	9	5	9

Da zwischen -2 und -10 ein Vorzeichenwechsel statt findet, setzt man nun für x_n -10 ein. Das Verfahren funktioniert nur solange F'(x) ungleich 0 ist.

x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$
-10	-695	240
-7,1042	-202,134	108,783
- 5,246	-56,812	51,086
-4,1339	-14,378	26,465
-3,5691	-2,651	17,134
-3,438	-0,177	14832
-3,426	-0,001	

4.3. Sonstige Nullstellen

Da man nun eine Nullstelle kennt, kann man durch Polynomdivision, das quadratische Glied der Gleichung abspalten und es dann mit Hilfe der pq- Formel lösen.

$(x^3 + 3x^2 + 5) : (x + 3,426) = x^2 – 0,426x + 1,4597$

$\underline{-(x^3 + 3,426x^2)}$

$- 0,426x^2+5$

$\underline{-(- 0,426x^2 – 1,4597x)}$

$1,4597x + 5$

$\underline{- (1,4597x + 5,001)}$

$- 0,001$ Bei diesem Wert handelt es sich um die vorher festgelegte Toleranz, bei der Nährung.

Für die Nullstellen ergibt sich :

$$x_{2;3} = 0,213 \pm \sqrt{0,213^2 - 1,4597}$$

da die Diskriminante negativ ist, hat diese Funktion keine weitere Nullstelle.

$L \approx \{(-3,426 / -0,001)\}$

5. Literaturverzeichnis / Quellenverzeichnis

- **Athen/ Bruhn :**(1980), Lexikon der Schulmathematik, Band 1, 2, 4, Alius Verlag Deubner & Co KG, Köln

- **Bornstein/ Semendjajew/ Musiol/ Mühling :**(2000), Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt an Mein

- **Bosch, Karl :** (1989), Mathematik-Taschenbuch, Verlag R. Oldenburg, München; Wien

- **Erven/ Rumpf/ Wörle :** (1994), Taschenbuch der Mathematik, R. Oldenburg Verlag, München; Wien, 12. Auflage

- **Jörgensen, Dieter :** (1999), der Rechenmeister, Rütten & Löning GmbH, Berlin, 1. Auflage

- **Manglberger, Michael :** (1997), Facharbeit, Michael Manglberger mangl@gmx.net 12.12.01

- **Schmid, August/ Weidig, Ingo :** LS9, Ernst Klett Verlag, Stuttgart; Düsseldorf; Leipzig

- **Sieber :** Mathematische Formeln (Erweiterte Ausgabe E), Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgar

- **Technische Universität- Freiberg :** Kubische Gleichungen, http:/www.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/kubisch.html (12.12.01)

6. Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literatur- und Quellenverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

----------------------------- --------------------------------

Ort, Datum Unterschrift